POLÍGONOS

DEFINICIÓN

Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ un conjunto de **n** puntos distintos de un plano $\mathcal{P}$ con $n \geq 3$ y

sean los **n** segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$ tales que:

(1) Ningún par de segmentos se intersecan, excepto en sus puntos extremos.

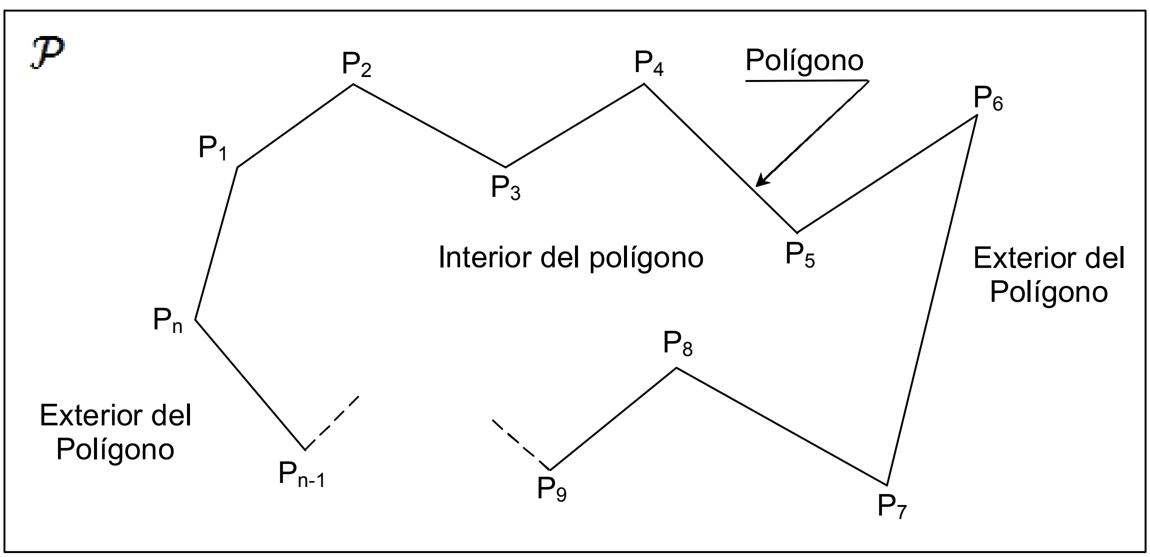
(2) Ningún par de segmentos con un extremo común son colineales.

Entonces, la unión de los n segmentos se llama ***polígono***.

Los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son los ***vértices*** del polígono.

Los segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$ son los ***lados***.
Dos lados que se intersecan se llaman lados consecutivos.
Dos lados consecutivos determinan el ángulo.

Los *ángulos* $\angle P_nP_1P_2, \angle P_1P_2P_3, \ldots \angle P_{n-1}P_nP_1$ son los ***ángulos*** del polígono.
La suma de las longitudes de los lados se llama ***perímetro*** del polígono.



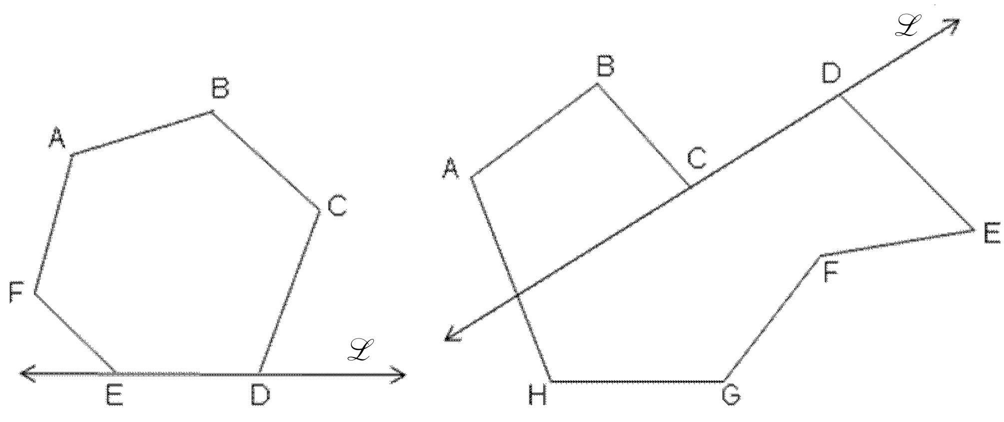
El polígono separa los puntos de un plano $\mathcal{P}$ en tres subconjuntos: El exterior del polígono, el propio polígono y el interior del polígono.

DEFINICIONES:

Un polígono se denomina polígono convexo si su interior es un conjunto convexo.

Además si un *polígono* es *convexo*, entonces el polígono unido con su interior, forma un conjunto convexo denominado región poligonal.

Un *polígono* es *no convexo* si su interior es un conjunto no convexo.



Polígono Convexo

Polígono No Convexo

También se dice que un *polígono* es *convexo* si al trazar la recta que contiene a uno cualquiera de sus lados, uno de los semiplanos determinados por la recta contiene puntos del polígono.

CLASIFICACION DE LOS POLÍGONOS

Los polígonos se clasifican según su número de lados.

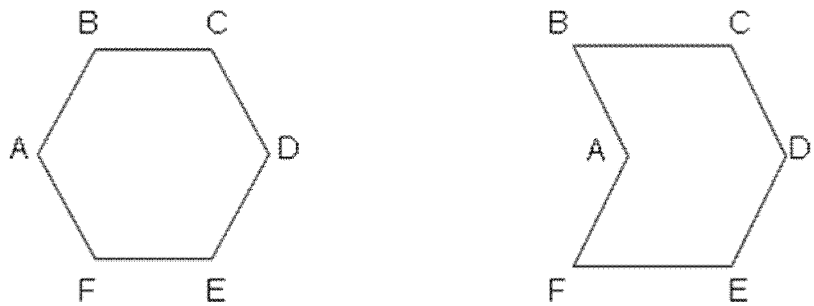
Nombre de los polígonos según el número de lados

De 3 lados … Triángulo
De 4 lados … Cuadrilátero
De 5 lados … Pentágono
De 6 lados … Hexágono
De 7 lados … Heptágono
De 8 lados … Octógono
De 9 lados … Eneágono o nonágono
De 10 lados … Decágono
De 11 lados … Endecágono
De 12 lados … Dodecágono
De 15 lados … Pentadecágono
De 20 lados … Icoságono

Los demás polígonos no tienen nombre especial, se les menciona según su número de lados.

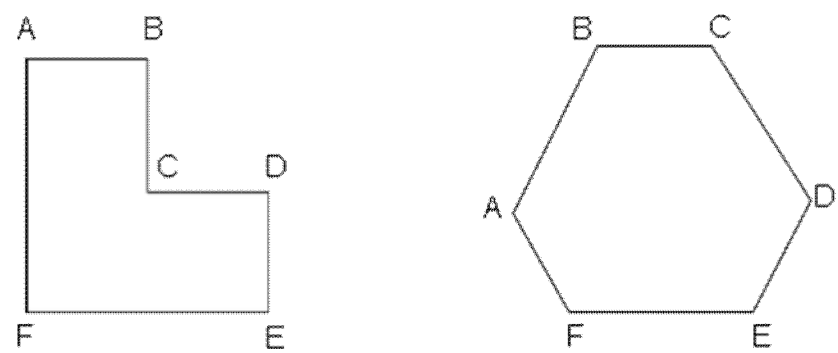
POLÍGONO EQUILÁTERO,EQUIÁNGULO , REGULAR E IRREGULAR

1. **Polígono Equilátero**: Es aquel polígono en el cual todos sus lados son congruentes.



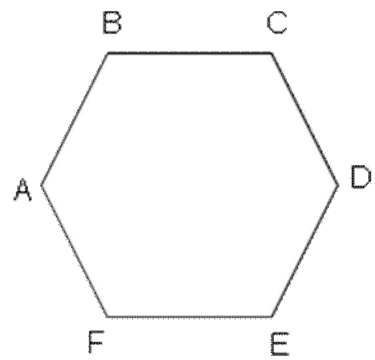
$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FA}$$

2. **Polígono Equiángulo**: Es aquel polígono en el cual todos sus ángulos son congruentes.



$$< A \cong < B \cong < C \cong D \cong < E \cong < F$$

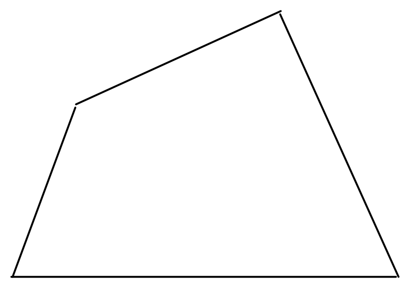
3. **Polígono Regular**: Es aquel polígono convexo, que es equilátero y equiángulo a la vez.



$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FA}$$

$$< A \cong < B \cong < C \cong D \cong < E \cong < F$$

4. Polígono Irregular: Es aquel polígono que no es regular.



DEFINICIONES

Un segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos de un polígono convexo se llama *diagonal* del polígono.

El segmento cuyos extremos son los puntos medios de dos lados cualesquiera de un polígono convexo se llama *diagonal media* de polígono.

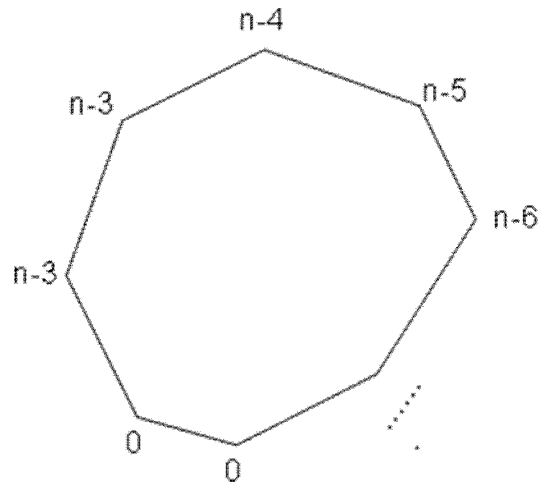
El **ángulo externo** de un polígono convexo es el ángulo adyacente suplementario a un ángulo del polígono, es decir, que éstos dos ángulos forman un par lineal.

TEOREMAS GENERALES SOBRE POLÍGONOS

TEOREMA: En todo polígono de n lados el número total de diagonales trazados desde un vértice es (n – 3) .

TEOREMA: En todo polígono de n lados el número total de diagonales es $\frac{n(n-3)}{2}$

Demostración:



$$Número\ de\ Dagonales = (n-3)+(n-3)+(n-4)\ldots\ldots..3+2+1+0+0$$

$$Número\ de\ Dagonales = (n-3)+0+\{(n-3)+(n-4)\ldots\ldots..3+2+1+0\}$$

$$Número\ de\ Dagonales = (n-3)+0+\{(n-3)+(n-3)\ldots\ldots.(n-3)+(n-3)\}$$

$$Número\ de\ Dagonales = (n-3)+0+\{(n-3)\}\frac{n-2}{2}$$

$$Número\ de\ Dagonales = n(\frac{n\quad 3}{2})$$

TEOREMA: En todo polígono de n lados el número total de diagonales medias es $\frac{n(n-1)}{2}$

TEOREMA: En todo polígono convexo de n lados la suma de las medidas de los ángulos es 180(n - 2).

TEOREMA: En todo polígono convexo la suma de las medidas de los ángulos externos considerados uno por vértice es igual a 360.

TEOREMA: En todo polígono regular o equiángulo (convexo) de n lados la medida de un ángulo interno es igual $\frac{180(n\quad 2)}{n}$

TEOREMA: En todo polígono regular o equiángulo (convexo) de n lados la medida de un ángulo externo es igual a $\frac{360}{n}$

TEOREMA: En todo polígono regular de n lados la medida de un ángulo central es igual a $\frac{360}{n}$

PROBLEMAS

1. Si el número de lados de un polígono se duplica, su número de diagonales aumenta en 234, entonces el número de lados del polígono es:

   A) 10 B) 11 C) 13 D) 15 E) 17

   Solución:

   Sea n el número de lados del polígono, entonces:

	Polígono 1	Polígono 2
Número de lados	n	$2n$
Número de Diagonales	$\frac{n(n-3)}{2}$	$\frac{zn(2n-3)}{2}$

Del enunciado: $\frac{2n(2n-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 234$

$$4n^2 - 6n - n^2 + 3n = 468$$

$$3n^2 - 3n - 468 = 0$$

$$n^2 - n - 156 = 0$$

$$(n-13)(n+12) = 0$$

$$\Rightarrow \quad n = 13 \; lados$$

2. Si a un polígono se le quita un lado se obtiene otro polígono cuyo número de diagonales difiere del primero en 19, entonces el número de lados del primer polígono es:

   A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

   Solución:

   Sea n el número de lados del primer polígono, entonces:

	Polígono 1	Polígono 2
Número de lados	n	$n-1$

Número de Diagonales	$\frac{n(n-3)}{2}$	$\frac{(n-1)(n-4)}{2}$

$$\textit{Del enunciado}: \quad \frac{n(n-3)}{2} - \frac{(n-1)(n-4)}{2} = 19$$

$$n^2 - 3n - n^2 + 5n - 4 = 38$$

$$2n = 42$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{n = 21\ lados}$$

3. En un polígono regular la medida de un ángulo interior es igual a cinco veces la medida de su ángulo central, entonces el número de triángulos que se pueden formar al trazar todas las diagonales desde un sólo vértice es:
A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Solución:

Sea n el número de lados del polígono, i la medida de su ángulo interior, e la medida de su ángulo exterior y c la medida de su ángulo central.

$$\textit{Del enunciado}: \quad i = 5c \quad , \qquad \textit{además}: \quad c = \frac{360}{n} \quad , \qquad e = \frac{360}{n} \quad y \quad e = 180 - i$$

$$\textit{entonces}, \qquad nc = en$$
$$c = 180 - i$$
$$c = 180 - 5c$$
$$c = 30$$

$$\textit{Luego}, \qquad n = \frac{360}{c} \quad \Rightarrow \quad n = 12\ lados$$

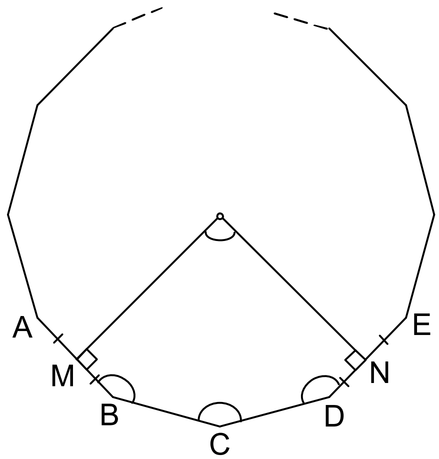
$$\textit{Finalmente}, \qquad \boldsymbol{el\ polígono\ se\ descompone\ en}$$

$$\boldsymbol{(n-2)\ triángulos, es\ decir\ en\ 10\ triángulos}$$

4. ABCDEF… es un polígono regular cuya medida de un ángulo interior es el triple de la medida del ángulo que forman las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$, entonces el número de diagonales de éste polígono es:

A) 104 B) 119 C) 135 D) 152 E) 170

Solución:



Sea n el número de lados del polígono, luego

En el hexágono OMBCDN de la figura:

$$180(6-2) = 180 + \frac{10}{3}\,i$$

$$180(6-2) = 180 + \frac{10}{3}\left(\frac{180(n-2)}{n}\right)$$

$$9n = 10n - 20$$

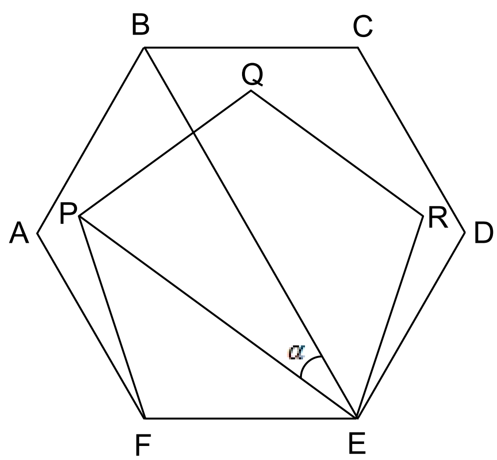
$$\Rightarrow \quad n = 20 \text{ lados}$$

Por lo tanto: $N_D = \dfrac{20(20-3)}{2} = 170$ ***diagonales***

5. Interiormente a un hexágono regular ABCDEF se construye el pentágono regular FPQRE, entonces la medida del ángulo BEP es:

A) 12 B) 14 C) 18 D) 24 E) 36

Solución:



Sea α *la medida del ángulo BEP*

Luego, en la figura:

$$\alpha = m\angle BEF - m\angle PEF$$

$$\alpha = 60 - 36$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 24$$

6. En un polígono equiángulo desde (n-9) vértices consecutivos se trazan (n-3) diagonales, entonces la medida de su ángulo interior es:

A) 108 B) 120 C) 135 D) 140 E) 144

Solución:

Sumando las diagonales trazadas desde los últimos 9 vértices con las trazadas desde los primeros (n -9) vértices consecutivos obtenemos el número total de diagonales trazadas en un polígono de n lados:

En un polígono de n lados, se han trazado desde:

V_n → 0 diagonal

V_{n-1} → 0 diagonal

V_{n-2} → 1 diagonales

V_{n-3} → 2 diagonales

V_{n-4} → 3 diagonales

V_{n-5} → 4 diagonales

V_{n-6} → 5 diagonales

V_{n-7} → 6 diagonales

V_{n-8} → 7 diagonales

Entonces, $28 \mid n \quad 3 = \dfrac{n(n-3)}{2}$

luego: $2n + 50 = n^2 - 3n$

$$n^2 - 5n - 50 = 0$$

$$(n-10)(n+5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad n = 10 \, lados$$

Finalmente, $i = \dfrac{180(10-2)}{10} = 144$

PROBLEMAS

01. En un polígono equiángulo ABCDE…, la bisectriz del ángulo ABC y la mediatriz de $\overline{DE}$ forman un ángulo de medida igual a 100º, la medida del ángulo exterior es

A) 40º B) 18º C) 30º D) 45º E) 72º

0.2 En un polígono regular, si el número de lados se reduce en 4, su número de diagonales se reduce en 46. ¿Cuál es la medida de su ángulo central?

A) 20 B) 24 C) 30 D) 36 E) 40

03. Indicar si son correctas las siguientes proposiciones:

I. Si un polígono tiene lados congruentes y ángulos rectos, entonces el polígono es regular.
II. Un ángulo es un conjunto convexo.
III. El conjunto de puntos que forman un polígono convexo es un conjunto no convexo

A) Solo I B) Solo II C)Solo III D) Solo I y III E)Solo II y III

04. La suma de los ángulos interiores de dos polígonos convexos difieren en 720º y sus ángulos centrales difieren en 75º. Indicar si el cociente, mayor que la unidad, de los lados de los dos polígonos convexos es igual a:

A)1 B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{4}$

05. Si un polígono convexo de n lados tuviera 3 lados menos tendría $(n+3)$ diagonales menos. Calcule n.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

06. La suma del número total de diagonales de un polígono convexo, más el número de ángulos rectos de la suma de las medidas de sus ángulos internos es 51. Halle el número de lados del polígono.

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

07 En un polígono convexo de n lados, si el número de lados aumenta en uno, entonces el número de diagonales

A) aumenta en (n – 1)
B) disminuye en (n – 1)
C) aumenta en 1
D) disminuye en 1
E) no aumenta ni disminuye

BIBLIOGRAFÍA

1. Edwin Moise, Floyd Downs, Geometría Moderna, Fondo educativo Interamericana. Edición 1970.

2. Profesores CEPRE-UNI, Geometría Plana. Edición 2004.

3. Roni Roca Meneses, Geometría Moderna, Ediciones CPUNALM. Edición 1996.

4. Helfgott, M. (1992). Geometría Plana. Editorial Escuela Activa S.A. Lima – Perú

5 .Vega, F. (1961). Matemática Moderna 4. Editorial Colegio Militar Leoncio Prado. Lima – Perú.